応用解析B　第12回

夜間主コース・2年次・4学期
金曜日6限17:50～19:20

電子工学科(E),
知能機械工学科(M),
人間コミュニケーション(H)

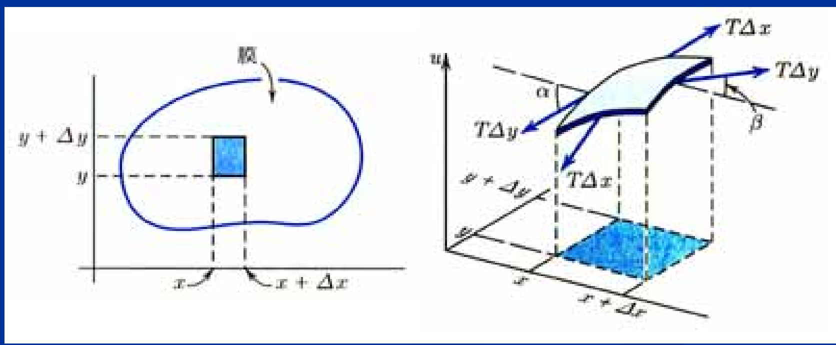
知能機械工学科　金森哉吏 (東4-303)

2階の線形偏微分方程式 (重要)

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元波動方程式
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元熱方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	↓定常な2次元熱方程式↓ 2次元ラプラスの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	2次元ポアソンの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$	2次元波動方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	3次元ラプラスの方程式

3.7 振動する膜のモデル化と2次元波動方程式の導出

- 太鼓の面のように張られた膜の運動を表す微分方程式を導く。



物理的仮定

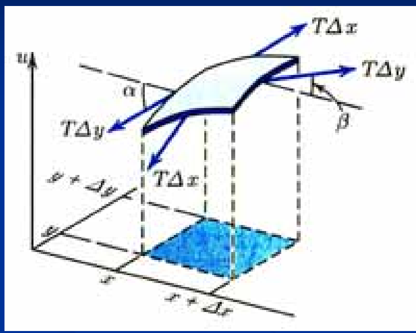
1. 膜の単位面積あたりの質量は、一定である(膜の均質性)。膜は完全に弾性的で、曲げに対する抵抗がない。
2. 膜は張られてから xy 平面上の全境界に沿って固定される。膜を張ることによって張力が生じ、単位長さあたりの張力 T は、すべての点ですべての方向に等しく、運動の途中で変化しない。
3. 運動の間の膜の変位 $u(x,y,t)$ は、膜の寸法に比べて小さく、膜の傾角も小さい。

→これらの仮定を満たすのは、・・・

太鼓など薄い弾性膜の微小横振動の場合。

微小部分に働く力の力学モデル

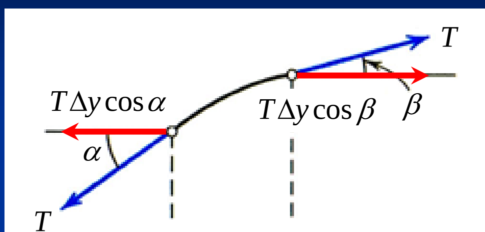
- 膜の微小部分に働く力を考える。
- 膜の変位と傾角が小さいため、変位した微小部分の辺の長さは、Δx と Δy に近似的に等しい。



- 単位長さあたりの張力は、T であるので、微小部分の辺に働く力は、ほぼ $T\Delta x$ と $T\Delta y$ である。
- 膜が完全な弾性を持つから、これらの力は膜の接線方向に働く。

力の水平方向成分のつりあい

- 膜の傾角の余弦を張力に掛けると力の水平方向成分を得る。
- 傾角が小さいので余弦は1に近い。

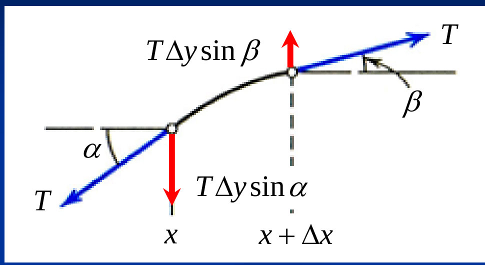


(例) y 軸と平行な辺の場合の力のつりあい

- したがって、対辺にはたらく2つの力の水平方向成分は、ほぼ等しい。
- したがって、膜の微小要素の水平方向の運動は無視できる。これより、膜の運動は横方向、すなわち垂直方向のみとなる。

y 軸方向の力の垂直方向成分

- y 軸と平行な辺を考える。
- 膜の傾角の正弦を張力に掛けると力の垂直方向成分を得る。
- これら2つの垂直方向成分の合力は、次式となる。また、傾角が小さいので正弦を正接で置き換えてもよい。
- ここで、tan α， tan β は、膜の接線方向の傾き。



$$\tan\alpha = \left(\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{(x,y_2)}$$

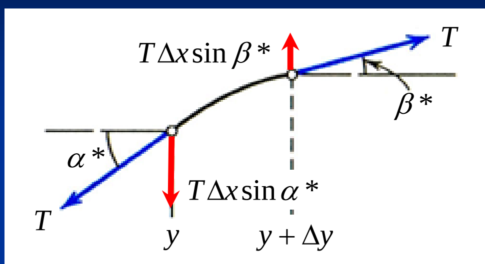
$$\tan\beta = \left(\frac{du}{dx}\right)\Bigg|_{(x+\Delta x,y_1)}$$

$$\begin{aligned} &T\Delta y\sin\beta - T\Delta y\sin\alpha \\ &= T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \\ &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] \quad (1) \end{aligned}$$

下付添字 x は偏微分を表し、y_1 と y_2 は y と $y+\Delta y$ の間の適当な値である。

x 軸方向の力の垂直方向成分

- 同様に、この微小部分の残り2辺、すなわち x 軸に平行な2辺にはたらく力の垂直方向成分を考えると、次式で表される。



$$\begin{aligned} &T\Delta x\sin\beta* - T\Delta x\sin\alpha* \\ &= T\Delta x(\sin\beta* - \sin\alpha*) \\ &\approx T\Delta x(\tan\beta* - \tan\alpha*) \\ &= T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)] \quad (2) \end{aligned}$$

下付添字 y は偏微分を表し、x_1 と x_2 は x と $x+\Delta x$ の間の適当な値である。

ニュートンの第2法則から微分方程式を得る

- 式(1)の y 軸方向の力と式(2)の x 軸方向の力の和が、微小部分の質量 ρ ΔA に加速度 $\partial^2 u/\partial t^2$ を生じさせる。よって次式が成り立つ。

$$\rho \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

- ここで、ρ は変位していない膜の単位面積あたりの質量、$\Delta A = \Delta x \Delta y$ は変位していない膜の微小部分の面積である。
- また、左辺の偏導関数は微小部分内の適当な点での値である。

2次元波動方程式

- さらに、両辺を ρ $\Delta x \Delta y$ にで割り、Δx と Δy を0に接近させると偏微分方程式、すなわち2次元波動方程式が得られる（式(3)）。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \left(c^2 = \frac{T}{\rho}\right) \qquad (3)$$

- また、括弧の中は u のラプラシアン $\nabla^2 u$ であるので、次式のように書ける。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

3.8　長方形膜：2重フーリエ級数の利用

- 振動膜の問題を解くには、2次元波動方程式の解 $u(x,y,t)$ を求めなければならない。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad \left(c^2=\frac{T}{\rho}\right) \qquad (1)$$

- 解 $u(x,y,t)$ は、時間 t で点 (x,y)での静止状態からの膜の変位で、物理系に課せられている次の条件を満たす必要がある。
- 境界条件：膜が、膜の境界上で固定されている。

$u=0$　（膜の境界上で、すべての $t \geqq 0$ に対して）　(2)

- 初期条件
  初期変位（$t=0$ での変位）　$f(x,y)$
  初期速度（$t=0$ での速度）　$g(x,y)$

$$u(x,y,0)=f(x,y) \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x,y) \qquad (4)$$

ステップ1：3つの常微分方程式

- 変数分離法を適用→→ → → → →

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \qquad (5)$$

方程式の解を変数 x, y と t のみに依存する2つの関数の積で表す。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

- 微分方程式(1)に代入→ → → → →

$$F\ddot{G}=c^2(F_{xx}G+F_{yy}G)$$

ドットは時間 t に関する微分を表す。
下付添字は偏微分を表す。

- 変数を分離するため
  両辺を c^2FG で割る。

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})$$

- 両辺は負の定数でなければならない。
  左辺は t のみに依存し、右辺は t に依存しないので、両辺の式は定数に等しい。
  調べてみると、境界条件（2）を満たし、恒等的に $u=0$ とはならない解を得るには、定数が負でなければならないことがわかる。これを $-\nu^2$ と書く。

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}(F_{xx}+F_{yy})=-\nu^2$$

ステップ1：3つの常微分方程式（続き）

- ここから、つぎの2つの方程式を得る。
- 時間の関数 $G(t)$ に対しては常微分方程式を得る→

$$\ddot{G}+\lambda^2 G=0 \quad (ただし\lambda=cv) \quad (6)$$

- 振幅の関数 $F(x,y)$ に対しては偏微分方程式を得る。これを2次元ヘルムホルツの方程式という。

$$F_{xx}+F_{yy}+v^2 F=0 \quad (7)$$

- この式の変数分離は、次式で行う。

$$F(x,y)=H(x)Q(y) \quad (8)$$

- 式(7)に代入する→

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q=-\left(H\frac{d^2Q}{dy^2}+v^2HQ\right)$$

- 変数を分離するために両辺をHQで割る。→

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+v^2Q\right)$$

ステップ1：3つの常微分方程式（続2）

- 式の両辺は負の定数でなければならない。

左辺は x のみに依存し、右辺は y のみに依存するので、両辺は定数に等しい。また調べてみると、境界条件（2）を満たし、恒等的に $u=0$ とはならない解を得るには、定数が負でなければならないことがわかる。これを－ k^2 と書く。

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+v^2Q\right)=-k^2$$

- これから、H と Q について、2つの常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0 \qquad (9)$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2}+p^2H=0 \quad (p^2=v^2-k^2) \qquad (10)$$

ステップ2：境界条件(2)を満たすこと

3つの常微分方程式の解を求めよう。

$$\ddot{G}+\lambda^2 G=0 \qquad (ただし\lambda=cv) \qquad (6)$$

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0 \qquad (9)$$

$$\frac{d^2Q}{dy^2}+p^2H=0 \quad (p^2=v^2-k^2) \qquad (10)$$

式(9) と式(10)の一般解は次式となる。ただし、A , B , C , D は定数である。

$$H(x)=A\cos kx+B\sin kx, \quad Q(x)=C\cos py+D\sin py$$

式(5)と式(2)から、F=HQ が境界で0でなければならない。すなわち、x=0, x=a, y=0, y=b で F=0 である。これから以下の条件を得る。

$$H(0)=0, \quad H(a)=0, \quad Q(0)=0, \quad Q(b)=0$$

ステップ2：境界条件(2)を満たすこと

B = 0 ならば $H \equiv 0$, $F \equiv 0$ となってしまうので、 $B \neq 0$ である。
したがって、$\sin ka = 0$ となる。その結果、k が得られる。

$H(0)=A=0$

$H(a)=B\sin ka=0 \quad \rightarrow \quad ka=m\pi \quad \rightarrow \quad k=\dfrac{m\pi}{a}$

同様に

$Q(0)=C=0$

$Q(b)=D\sin pb=0 \quad \rightarrow \quad pb=n\pi \quad \rightarrow \quad p=\dfrac{n\pi}{b}$

このようにして、次の解が得られる（振動弦のときと同様に m, n が負のときは正のときの違いは解の符号だけで、本質的に同じ解を与える。）。

$$H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}, \quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \begin{pmatrix} m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots \end{pmatrix}$$

これらから、長方形膜の境界で0になる解(関数) は次式で与えられる。

$$F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \begin{pmatrix} m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots \end{pmatrix} \qquad (11)$$

ステップ2：境界条件(2)を満たすこと

次に、振幅Fに関する偏微分方程式（7）との関連において、
時間Gに関する常微分方程式（6）を考える。

式(10)で　$p^2 = v^2 - k^2$,　式(6)で　$\lambda = cv$　であるので、$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}$
また、　$k = m\pi / a$,　$p = n\pi / b$　であるので、上式は次式となる。

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \qquad (12)$$

ここで λ_{mn}は、固有値である。また時間の関数 G に関する常微分方程式（6）の一般解は、次式で与えられる。

$$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \quad (6)$$

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t$$

したがって、2次元波動方程式の解（固有関数）は、次式となる。

$$u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$$
$$= (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (13)$$

正方形膜の固有値と固有関数

$$u_{mn}(x, y, t) = F_{mn}(x, y)G_{mn}(t)$$

$$F_{mn}(x, y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{npy}{b} \quad \begin{pmatrix} m = 1, 2, \cdots \\ n = 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \qquad (11)$$

ここで面白いことが分かる。
この F_{mn} が a と b に依存するので、m と n が異なっても、同じ固有値に対応する場合がある。物理的にいうと、同じ振動数の振動でも、節曲線（膜の動かない点からなる曲線）がまったく異なることがある。このことを正方形膜の場合について見てみることにする。

正方形膜は、$a = b = 1$ である。
式（12）から固有値は次式となる。
したがって、$\lambda_{mn} = \lambda_{nm}$ となる。
$m \neq n$ とすると、これらの固有値に対応する関数は、次の2つの異なる関数である。

$$\lambda_{mn} = c\pi\sqrt{m^2 + n^2} \qquad (14)$$

$$F_{mn} = \sin m\pi x \sin n\pi y$$
$$F_{nm} = \sin n\pi x \sin m\pi y$$

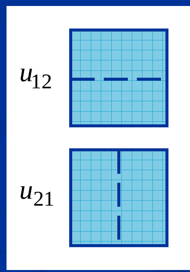
正方形膜の節曲線

たとえば、$\lambda_{12} = \lambda_{21} = c\pi\sqrt{5}$ には次の2つの関数が対応する。

$$F_{12} = \sin \pi x \sin 2\pi y$$
$$F_{21} = \sin 2\pi x \sin \pi y$$

これに対応する解は、次式となる。

$$u_{12} = (B_{12} \cos c\pi\sqrt{5}t + B^*_{12} \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{12}$$
$$u_{21} = (B_{21} \cos c\pi\sqrt{5}t + B^*_{21} \sin c\pi\sqrt{5}t)F_{21}$$



それぞれの節曲線は、$y = 1/2$ と $x = 1/2$ である。

B_{12} =1，B^*_{12} = B^*_{21} =0 とすると

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t(F_{12} + B_{21}F_{21}) \qquad (15)$$

これは固有値 $c\pi\sqrt{5}$ に対応する別の振動を表す。この関数の節曲線は、次の方程式の解である。

$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

正方形膜の節曲線 (2)

固有値 $c\pi\sqrt{5}$ に対応する振動を表す関数。

$$u_{12} + u_{21} = \cos c\pi\sqrt{5}t(F_{12} + B_{21}F_{21}) \qquad (15)$$

この関数の節曲線は、次の方程式の解である。

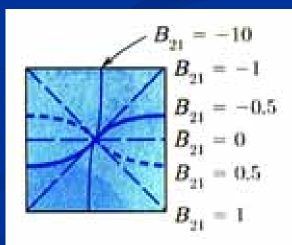
$$F_{12} + B_{21}F_{21} = \sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ であるので、上式は次のようになる。

$$\sin \pi x \sin 2\pi y + B_{21} \sin 2\pi x \sin \pi y = 0$$
$$\sin \pi x (2 \sin \pi y \cos \pi y)$$
$$+ B_{21}(2 \sin \pi x \cos \pi x) \sin \pi y = 0$$
$$2 \sin \pi x \cos \pi y (\sin \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0$$
$$\sin \pi x \sin \pi y (\cos \pi y + B_{21} \cos \pi x) = 0 \qquad (16)$$

この解は B_{21} の値によって変わる。

B_{21}を変えたときの解式(15) の節曲線→



ステップ3：問題の一般解，2重フーリエ級数

- 初期条件(3) と(4)を満たす解を得るために、上の固有関数からなる2重級数を考える。

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}^{*}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad(17)$$

- 式(17)は初期条件（初期変位）の式(3)から、次式となる。

$$u(x,y,0)=f(x,y)\qquad(3)$$

$$u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)\qquad(18)$$

- 式(18)を2重フーリエ級数と呼ぶ。

ステップ3：問題の一般解，2重フーリエ級数（2）

- ここで、$f(xy)$ を式(18)のように展開できると仮定する。

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad(18)$$

- 式(18)で $f(xy)$ のフーリエ係数 B_{mn} を決めるため、まず係数を式(19) のように置き、式(18)を次のように書き換える。

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\qquad(19)$$

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$$

- y を固定すると、これは $f(xy)$ を x の関数と考えたときのフーリエ正弦級数である。フーリエ正弦級数のフーリエ係数 $K_m(y)$は次式で与えられる。

$$K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx\qquad(20)$$

ステップ3：問題の一般解，2重フーリエ級数（3）

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (19)$$

- さらに、式(19)は、$K_m(y)$ のフーリエ正弦級数である。フーリエ正弦級数のフーリエ係数 B_{mn} は、次式で与えられる。

$$B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

- この式に式(20)を代入すると、次式の一般化されたオイラーの公式が得られ、式(18)のように $f(xy)$ を2重フーリエ級数に展開したときのフーリエ係数を与える。

$$B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots \end{pmatrix} \qquad (21)$$

ステップ3：問題の一般解，2重フーリエ級数（4）

- つぎに B^*_{mn} を決めるため、式(17)を項別に t で微分する。
初速度の式(4)を用いると、次式が得られる。

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B^*_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)$$

- $g(xy)$ をが2重フーリエ級数に展開できるとすると、B_{mn} のときと同じようにして、B^*_{mn} が得られる。

$$B^*_{mn}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^b\int_0^a g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \qquad \begin{pmatrix} m=1,2,\cdots \\ n=1,2,\cdots \end{pmatrix} \qquad (22)$$

- 以上より、式(17)の2重級数が初期条件(3)と(4)を満たすためには、係数 B_{mn} と係数 B^*_{mn} を式(21)と式(22)に従って選ばなければならない。