応用解析B　第11回

夜間主コース・2年次・4学期
金曜日6限17:50～19:20

電子工学科(E),
知能機械工学科(M),
人間コミュニケーション(H)

知能機械工学科　金森哉吏 (東4-303)

前回の復習

3.1　偏微分方程式の基本概念
　　2階の線形偏微分方程式
3.2　振動する弦のモデル化
　　波動方程式の導出
3.3　変数分離法とフーリエ級数を利用した
　　偏微分方程式の解法
3.4　波動方程式のダランベールの解

3.1 基本概念 「微分方程式とは？」

- 偏微分方程式
  - 2つ以上の独立変数を含む問題で現れる。
  - 正確には、複数の独立変数の関する（未知）関数とその偏導関数を含む方程式
    ちなみに、1つの独立変数だけ→常微分方程式
- 2つ以上の独立変数の例
  - 複数の空間座標
  - 時間 t と1つ以上の空間座標
  - ＋温度，＋圧力，＋速度，＋加速度
- 方程式の階数
  - 方程式に含まれる導関数の最高階数

偏微分方程式が、．．．

- 「偏微分方程式が線形である」
  方程式が、従属変数（未知関数）と
  その偏導関数について1次で表される。

- 「偏微分方程式が同次である」
  方程式のすべての項が、従属変数または
  その偏導関数を含む。

2階の線形偏微分方程式 (重要)

- linear partial differential equation

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元波動方程式
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元熱方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	2次元ラプラスの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$	2次元ポアソンの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$	2次元波動方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	3次元ラプラスの方程式

微分方程式の解があるとは、. . .

- 独立変数が作る空間内の閉領域 R において偏微分方程式の解があるとは、
  - 閉領域 R を含む領域で方程式に現れるすべての偏導関数が存在する

  かつ
  - 閉領域 R のいたるところで、方程式を満足する関数がある

  ことである。

偏微分方程式の一意的な解は、．．．

- ある物理的な問題に対する偏微分方程式の一意的な解は、物理的状況から得られる付加的な情報を用いて決められる。
  →付加的条件
- 微分方程式を解くとは、与えられた領域で成立して、与えられた付加的条件を満たす方程式の解を得ること。

付加的条件

- 初期条件($t = 0$ での条件)
  - 波動方程式→初期変位, 初期速度
  - 熱方程式→初期温度分布
- 境界条件
  境界の表面 S , 領域の境界線 C で
  解 u の値やその導関数が与えられる。
  - ラプラスの方程式には境界条件を与える。

解の重ね合わせまたは線形原理（定理）

同次線形偏微分方程式においては、同次線形常微分方程式と同様に、既知の解の重ね合わせにより新しい解が得られる。

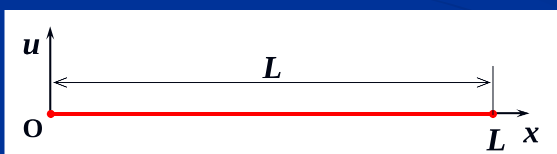
- ある領域 R での線形同次偏微分方程式の任意の解を u_1, u_2 とすると、

$$\boxed{u = c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

も、その領域 R での解である。ただし、c_1, c_2 は任意の定数である。

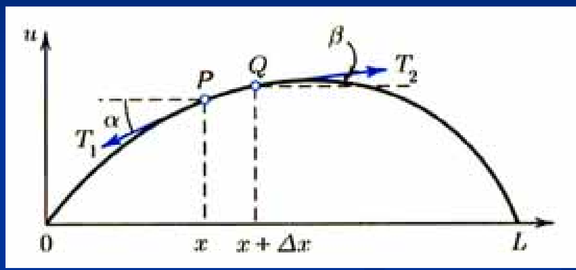
3.2　振動する弦のモデル化と波動方程式の導出

- バイオリンの弦のような弾性的な弦の微小横振動の波を記述する方程式を導く。
- 長さ L の弦を用意する。
  - 弦の一端を $x = 0$ で固定する。
  - 弦を x 軸に沿って長さが L になるように伸ばす。
  - 弦のもう一端を $x = L$ で固定する。



弦の微小部分に働く力（力学モデルへ）

- 弦の微小部分に働く力について考える。

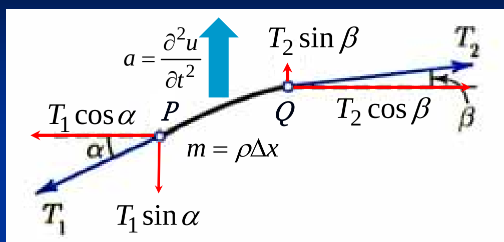


- 弦は曲げに対して抵抗がないので、弦の各点で接線方向に張力が働く。微小部分の端点 P と Q での張力 T_1 と T_2 とする。
- 弦の各点は垂直方向に動き、水平方向には運動しない。

微小部分に働く張力（力学モデル）

- 弦の各点は垂直方向に動き、水平方向には運動しない。

したがって、



- 張力の水平方向成分は一定でなければならない。 $T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T = \text{constant}$
- 垂直方向には、2つの力が働き、これら2つの合力は、微小部分の質量 m に加速度 a を掛けたものに等しい。 $T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- 両辺を T で割る。→左辺は･･･ $T = T_1 \cos\alpha,\ T = T_2 \cos\beta$

傾きの関係（力学モデル）

$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- $\tan\alpha$ は、点 P（位置 x）での弦の曲線の傾き

$$\tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x}$$

- $\tan\beta$ は、点 Q（位置 $x+\Delta x$）での弦の曲線の傾き

$$\tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x}$$

- $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を代入し、両辺を Δx で割る。

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Δx を0に近づけると、次の線形偏微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

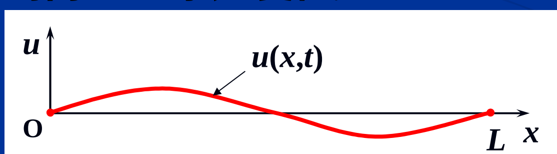
1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 同次2階の微分方程式
- 物理定数 T/ρ を c^2 で表す。（T/ρ は正の量であることを示すため）

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$

- 1次元：空間座標 x のみが現れる。
- $u(x, t)$：$t > 0$ での弦の形、すなわち任意の場所 x，任意の時間 t での弦の変位。



3.3 変数分離法とフーリエ級数を利用した偏微分方程式の解法

- 弦がどのように運動するかを調べるためには、方程式を解かなければならない。
- 解 u は、物理系に課せられている次の条件を満たす必要がある。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

- 境界条件
  弦が $x=0$ と $x=L$ で固定されている。

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 \qquad (2)$$

- 初期条件
  初期変位（$t=0$ での変位）$f(x)$
  初期速度（$t=0$ での速度）$g(x)$
  （これらによって弦の運動の様子が変わる）

$$u(x,0)=f(x) \qquad (3)$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = g(x) \qquad (4)$$

解法の手順

ステップ1

いわゆる変数分離法または乗積法を適用して、2つの常微分方程式を得る。

ステップ2

これら2つの方程式の解で、かつ境界条件(2)を満たすものを求める。

ステップ3

これらの解を組み合わせて、波動方程式(1)の解であり、かつ初期条件(3)と(4)を満たすものを見つける。

ステップ3：結果

- **形式解**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t + B_n{}^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (12)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (14)$$

$$B_n{}^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (15)$$

式(12)は、式(1)の解であって、条件(2)(3)(4)を満たす。ただし、級数(12)が収束して、級数(12)を x と t について2回微分した級数も収束して、和が連続な $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial t^2$ になる必要がある。

ステップ3：解の妥当性

- **形式解(12)が正しいことを証明する。**

簡単のため初速度 $g(x)$ が0である場合を考える。この場合 $B_n{}^*$ は0で式(12)は次式となる。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}\right) \qquad (16)$$

3角関数の積を和にする公式を用いて、

$$\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

次式のように書き換えられる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}}+\frac{1}{2}\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}}$$

ここで、$f(x)$ をフーリエ正弦級数で表した式(13)の変数 x に x -ct と x+ct をそれぞれ代入する。

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x) \qquad (13)$$

$$\therefore \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)}=f(x-ct),\quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct)}=f(x+ct)$$

すると、右辺の2つの級数が得られるので、この式は次のように書き換えることができる。

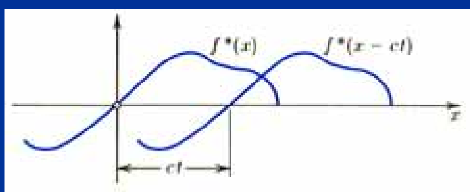
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right] \qquad (17)$$

ただし、f^* は周期 $2L$ を持ち、f を奇関数として拡張したもの。つまり、x 軸方向に移動しても、同じ関数が繰り返される。

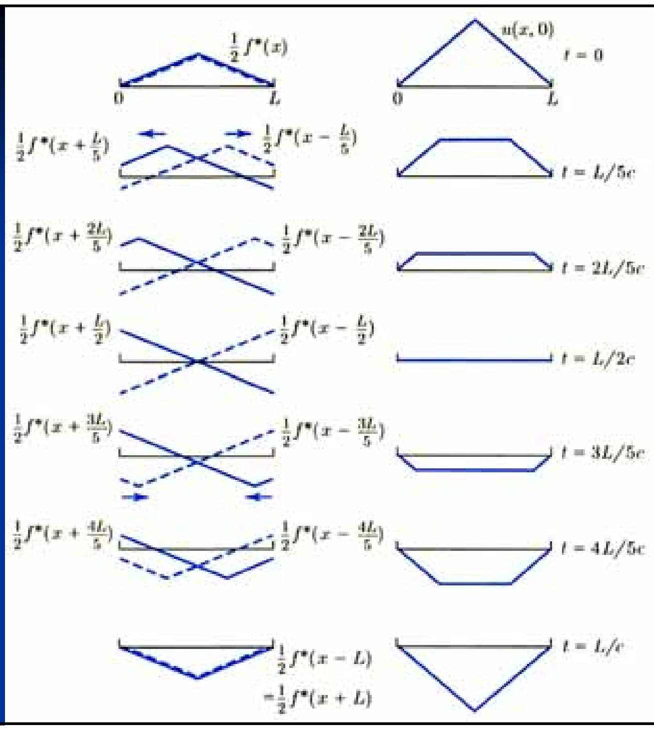
式(17)の物理的解釈

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right] \qquad (17)$$

$f^*(x - ct)$ のグラフは、$f^*(x)$ のグラフを右へ ct だけ移動させて得られる（下図参照）。



したがって、t の増加とともに ($c>0$)
$f^*(x - ct)$ は、右へ進行する波を、
$f^*(x + ct)$ は、左へ進行する波を表す。
そして、$u(x,t)$ はこれら2つの波の重ねあわせである。



21

3.4 波動方程式のダランベールの解

- 別の方法で、今示した波動方程式の解の式(17)が直接得られることを示す。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(c^2 = \frac{T}{\rho}\right) \qquad (1)$$

- 式(2)の新しい独立変数を導入し、u を v と z の関数とする。

$$v = x + ct, \qquad z = x - ct \qquad (2)$$

- 式(1)の偏導関数を v と z についての偏導関数で表す。
- これ以後、偏微分を下付き添え字で表すことにする。
- 式(2)から

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_x = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 1$$

22

- $u(x,t)$ は v と z の関数であるので、連鎖の法則から偏微分 u_x は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_x &= u_v v_x + u_z z_x \\ &= u_v + u_z \end{aligned}$$

- さらに連鎖の法則を適用すると、偏微分 u_{xx} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_v + u_z)_x \\ &= (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x \end{aligned}$$

- すべての偏微分が連続するとすると $u_{zv} = u_{vz}$ である。よって、

$$\begin{aligned} &= (u_{vv} + u_{zv}) + (u_{vz} + u_{zz}) \\ &= u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz} \end{aligned}$$

- 式(1)の偏微分 u_{tt} も同様に変形すると次式が得られる。

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz})$$

- この2つの結果を式(1)に代入すると次式となる。

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \qquad (3)$$

- この方法の利点は、積分を2回繰り返せば、式(3)が簡単に解けることである。

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \qquad (3)$$

- 実際にここで, z について積分すると次式が得られる。
ただし、$h(v)$ は v の任意関数である。

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

- さらに, v について積分すると次式が得られる。
ただし、$\psi(z)$ は z の任意関数である。

$$u = \int h(v)dv + \psi(z)$$

- 積分は v のみの関数なので、$\phi(v)$ とすると、u の解は $u = \phi(v) + \psi(z)$ の形となる。そして式(2)を用いると、波動方程式のダランベールの解が得られる。

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct) \qquad (4)$$

初期条件を満たすダランベールの解

- 波動方程式のダランベールの解

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \qquad (4)$$

- 初期条件（初期変位 $f(x)$ と初期速度 $g(x)$）は次式で表される。

$$u(x,0)=f(x) \qquad (5)$$
$$u_t(x,0)=g(x) \qquad (6)$$

- 式(4)を微分すると次式となる。

$$u_t(x,t)=c\phi'(x+ct)-c\psi'(x-ct) \qquad (7)$$

ただし、プライム´は、引数 $x+ct$ と $x+ct$ についての微分である。

- 式(4)-(7)から、

$$u(x,0)=\phi(x)+\psi(x)=f(x) \qquad (8)$$
$$u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\psi'(x)=g(x) \qquad (9)$$

- 式(9)を c で割って、x で積分すると次式が得られる。

$$\phi(x)-\psi(x)=k(x_0)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds \qquad (k(x_0)=\phi(x_0)-\psi(x_0)) \qquad (10)$$

- 式(10)と式(8)を加えてψを消去し、2で割るとφ(x) が得られる。

$$\phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)$$

- 式(8)から式(10)を引いて、2で割るとψ(x) が得られる。

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (12)$$

- 式(11)で x を $x+ct$ と置き換える（積分区間 x_0 から $x+ct$ まで）。

$$\phi(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)^*$$

- 式(11)で x を $x+ct$ と置き換える (積分区間 x_0 から $x+ct$ まで)。

$$\phi(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)^*$$

- 式(12)で x を $x-ct$ と置き換える (積分区間 x_0 から $x-ct$ まで)。
  さらに積分の符号を変えて積分区間を $x-ct$ から x_0 までにする。

$$\psi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x_0}g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (12)^*$$

- こうしておいて、φ($x+ct$) と ψ($x-ct$) を加える、すなわち式(4)より次式が得られる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds \qquad (13)$$

- 初期速度が0ならば、一次元波動方程式の解が得られる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right] \qquad (14)$$

これは変数分離法で
求めた解と同じである。

3.5 熱方程式：フーリエ級数解

一様な物質でできている物体中の温度
$u(x, y, z, t)$ は次の熱方程式で与えられる。

- 熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\nabla^2 u \qquad \left(c^2=\frac{K}{\sigma\rho}\right)$$

  - ただし、c^2 は熱拡散率、K は熱伝導率、σ は比熱、ρ は物体の密度である。
  - $\nabla^2 u$ は u のラプラシアンである。

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

一次元熱方程式

- 図のような細長い棒を考える。

  - 一様な断面積をもち、均質な物質でできていて、x 軸方向に向いている。棒は側面で完全に断熱されていて、熱が x 軸方向のみに流れるとする。
  - すると、u が x と t のみに依存して、方程式は1次元熱方程式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \right) \quad (1)$$

一次元熱方程式を解く

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(c^2 = \frac{K}{\sigma\rho} \right) \quad (1)$$

- 境界条件
  棒の両端 $x = 0$ と $x = L$ で温度が0である。

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0 \quad (\text{すべての } t \text{ について}) \quad (2)$$

- 初期条件
  初期温度分布が関数 $f(x)$ で与えられる。

$$u(x,0) = f(x) \qquad (f(x) \text{ は与えられている}) \quad (3)$$

- 境界条件式(2)と初期条件式(3)のもとで、式(1)の1次元熱方程式を解くことにする。

波動方程式と熱方程式の違い

- 方程式の違い
  - 波動方程式　u_{tt}
  - 熱方程式　u_t

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial u}{\partial x^2}$	$\left(c^2 = \dfrac{T}{\rho} \right)$
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	$\left(c^2 = \dfrac{K}{\sigma \rho} \right)$

- 初期条件の違い
  - 波動方程式では、2つの初期条件が必要である。
  - 熱方程式では、1つの初期条件で十分である。

解法の手順

ステップ1

いわゆる変数分離法または乗積法を適用して、2つの常微分方程式を得る。

ステップ2

これら2つの方程式の解で、かつ境界条件(2)を満たすものを求める。

ステップ3

これらの解を組み合わせて、熱方程式 (1)の解であり、かつ初期条件(3) を満たすものを見つける。

ステップ1：2つの常微分方程式

- **変数分離法または乗積法の適用→→** $u(x,t) = F(x)G(t) \quad (4)$
  方程式の解を変数 x と t のみに依存する
  2つの関数の積で表す。
- **微分すると次式となる。→→→→→** $\dfrac{\partial u}{\partial t} = F\dot{G}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''G$
  ドットは時間 t に関する微分を表す。
  プライム´は位置 x に関する微分を表す。
- **微分方程式(1)に代入すると次式となる。→** $F\dot{G} = c^2F''G$
- **さらに両辺を c^2FG で割る。**
- **式の両辺は定数でなければならない。→** $\dfrac{\dot{G}}{c^2G} = \dfrac{F''}{F} = k \quad (5)$
  左辺は t のみ、右辺は x のみの関数である。
  ここで t の値を変えると左辺の値は変わるが、
  右辺の値は変わらない（x についても同様）。
  その場合、この式が成立するのは定数の場合だけである。

$$F'' - kF = 0 \quad (6)$$
$$\dot{G} - c^2kG = 0 \quad (7)$$

ステップ2：境界条件(2)を満たす(k≧0)

k≧0 のときは、境界条件式(2)を満たす解 u=FG は u≡0 だけとなり、
意味のない解となる。

$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0$ （すべての t について） (2)

$u(x,t) = F(x)G(t) \quad (4)$

$u(0,t) = F(0)G(t) = 0, \quad u(L,t) = F(L)G(t) = 0$

$G(t)$≡0 ならば，明らかに u≡0 となり，意味のない解となる。
したがって，$G(t)$が0でないとすると，境界条件は次のようになる。

$F(0) = 0, \quad F(L) = 0$

$F'' - kF = 0 \quad (6)$

$k = 0$ のとき，式(6)の一般解は $F(x)=ax+b$ となる。式(8)から $a = b = 0$ が得られる．したがって，$F(x)$ ≡0，u≡0 となり，意味のない解となる。

$k > 0$ のとき，$k = \mu^2$ とおくと，式(6)の一般解は $F = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$
境界条件を用いると $F(x)$ ≡0，u≡0 となり，意味のない解となる。

ステップ2：境界条件(2)を満たす(k<0)

$k<0$ のとき、$k=-p^2$ とおくと、式(6) の形 → $F''+p^2F=0 \quad (6)^*$
および一般解は次式となる。 → $F(x)=A\cos px+B\sin px$

式(8)から、次式を得る。→ $F(0)=A=0$ $\quad F(L)=B\sin pL=0$

$B=0$ では、$F(x)\equiv 0$，$u\equiv 0$ となり，**意味のない解**となる。

$B\neq 0$ とおくと、$\sin pL=0$ となり、その結果、次式が得られる。 → $pL=n\pi$ → $p=\dfrac{n\pi}{L}$

$B=1$ とおくと、無限に多くの解 $F(x)=F_n(x)$ が得られる。

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

n が負の整数の場合には、$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ であるので、式(10)の解の符号が変わるだけで同じ解が得られる。

このように k が限定され、式(6)´と式(9)から k の値が次のようになる。 → $k=-p^2=-(n\pi/L)^2$

ここまでは、一次元波動方程式の解法とまったく同じである。

ステップ2： G の一般解 → 解 u

この k の値 $k=-p^2=-(n\pi/L)^2$ に対して、

方程式 (7) は式(7)*の形になる。

$$\dot{G}-c^2kG=0 \qquad (7) \quad \rightarrow \quad \dot{G}+\lambda_n{}^2G=0 \qquad (7)^*$$

ここで、$\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$

また、一般解は次式となる。→ $G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n{}^2t} \quad (n=1,2,\cdots)$

したがって、解となる関数 $u_n(x,t)=F_n(x)\,G_n(t)$ は、次式となる。

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t} \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (9)$$

式(9)は、この問題の固有関数であり、固有値は λ_n である。

ステップ3：問題の一般解

- 初期条件(3) を満たす解を得るために、上の固有関数からなる級数を考える。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2 t}\qquad\left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}\right)\qquad(10)$$

- 式(10)は初期条件 (初期温度分布) の式(3)から、次式となる。

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$$

- 式(10)が式(3)を満たすためには、フーリエ正弦級数でなければならない。すなわち、係数B_n は次式となる。

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\quad(n=1,2,\cdots)\quad(11)$$

- $f(x)$ が区間 $0\leqq x\leqq L$ で区分的に連続で、この区間内のすべての点で片側微分係数をもつと仮定すると、式(11) の係数を持つ級数 (10) が、この問題の解である。
- t が無限に大きくなると、指数因子のために式(10)のすべての項が0に近づく。また、その減衰率は n とともに大きくなる。

定常な2次元の熱流

- 2次元熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=c^2\nabla^2 u=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

もし熱流が定常ならば (すなわち時間に無関係ならば) $\partial u/\partial t=0$ である。そして、熱方程式はラプラスの方程式に帰着する。

$$\nabla^2 u=\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0}\quad(15)$$

↑ 2次元のラプラスの方程式

熱流問題

- 問題は、2つの部分から構成される。
  - xy平面のある領域 R で成立するラプラスの方程式 (15)
  - 領域 R の境界線 C で与えられる境界条件

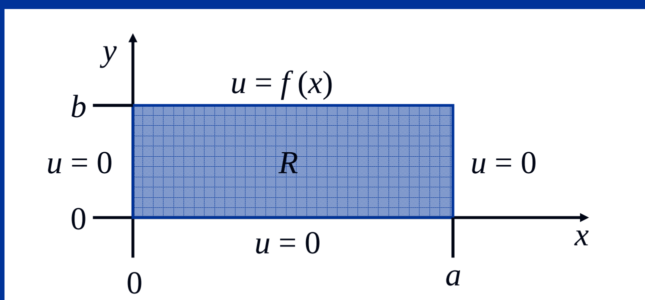
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

→境界値問題

- 境界値問題の分類
  - ディリクレの問題: u が境界線 C で与えられる。
  - ノイマンの問題:法線導関数 $u_n = \partial u / \partial n$ が境界線 C で与えられる。
  - 混合問題:関数 u が C の一部で与えられ、法線導関数 u_n が境界線 C のほかの部分で与えられる。

長方形 R でのディリクレの問題

- 図のように長方形 R の上辺の温度 $u(x, y)$ は $f(x)$，ほかの3つの辺では温度が0と仮定して，ラプラスの方程式(15)に対するディリクレの問題を考える。



長方形 R と境界値

ディリクレの問題を変数分離で解く

- 位置 (x,y) での温度 u

$$u(x,y)=F(x)G(y)$$

- ラプラスの方程式に代入する。

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}G+F\frac{d^2G}{dy^2}=0$$

- FG で割る。

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}+\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2}=0$$

- F と G について整理する。

$$\frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=-\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2}=-k$$

$F(x)$ に関する境界条件

- F に対する微分方程式

$$\frac{d^2F}{dx^2}+kF=0$$

- 左端および右端の境界条件

$$F(0)=0,\quad F(a)=0$$

- 一般解

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \qquad k=p^2$$

$$F(0)=A=0,\quad F(a)=B\sin pa=0$$

- $B\neq 0$ でなければならないため、

$$p=\frac{n\pi}{a} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

- これより

$$k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

- $F(x)\neq 0$ の解は、

$$F(x)=F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (16)$$

$G(y)$ に関する境界条件

- G に対する微分方程式 $$\frac{d^2G}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 G = 0$$
- 一般解の形は、 $$G(y) = Ae^{py} + Be^{-py}$$
- よって解は、 $$G(y) = G_n(y) = A_n e^{n\pi y/a} + B_n e^{-n\pi y/a}$$
- 下端での境界条件 $u = 0$ より $$G_n(0) = A_n + B_n = 0 \longrightarrow B_n = -A_n$$
- これより $$G_n(y) = A_n\left(e^{n\pi y/a} - e^{-n\pi y/a}\right) = 2A_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$
- 以上 F と G より、この問題の固有関数が得られた。 $$u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n * \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \qquad (17)$$

残った境界条件と解

- 上端の境界条件を満たす解を得るために級数を考える。 $$u(x,b) = f(x)$$ $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y)$$
- $y = b$ での固有関数は、
- 書き換えると $$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n * \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a}$$ $$u(x,b) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n * \sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}$$
- この式より $f(x)$ はフーリエ級数であるため、括弧の中の表示は、 $f(x)$ のフーリエ係数 b_n でなければならない。

解

- したがって、$f(x)$ のフーリエ係数 b_nは、

$$b_n = A_n * \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

- 以上よりこの問題の解は、

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n * \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \qquad (19)$$

$$A_n * = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \qquad (20)$$

定常熱流＝静電ポテンシャル＝弾性膜

- 異なる物理系が同じ数学的モデルで表され、ラプラスの方程式で求めることができる。

	定常熱流	静電ポテンシャル	弾 性 膜
u	温 度	ポテンシャル	変 位
境 界 条 件			
３辺 ０	温度０ ０度維持	ポテンシャル０ 接 地	変位０ 固定
上辺 $f(x)$	温度分布	ポテ分布	変位形状