応用解析B　第10回

夜間主コース・2年次・4学期
金曜日6限17:50～19:20

電子工学科(E),
知能機械工学科(M),
人間コミュニケーション(H)

知能機械工学科　金森哉吏 (東4-303)

3.1 基本概念
微分方程式とは？

- 常微分方程式
  - 1つの独立変数だけで表される問題で現れる。
- 偏微分方程式
  - 2つ以上の独立変数を含む問題で現れる。
- 2つ以上の独立変数の例
  - 複数の空間座標
  - 時間 t と1つ以上の空間座標
  - ＋温度，＋圧力，＋速度，＋加速度

- 偏微分方程式
  複数の独立変数の関する（未知）関数と
  その偏導関数を含む方程式

- 方程式の階数
  方程式に含まれる導関数の最高階数

偏微分方程式が、・・・

- 「偏微分方程式が線形である」
  方程式が、従属変数（未知関数）と
  その偏導関数について１次で表される。

- 「偏微分方程式が同次である」
  方程式のすべての項が、従属変数または
  その偏導関数を含む。

2階の線形偏微分方程式 (重要)

- linear partial differential equation

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元波動方程式
$\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	1次元熱方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	2次元ラプラスの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$	2次元ポアソンの方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$	2次元波動方程式
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$	3次元ラプラスの方程式

微分方程式の解があるとは、・・・

- 独立変数が作る空間内の閉領域 R において偏微分方程式の解があるとは、
  - 閉領域 R を含む領域で方程式に現れるすべての偏導関数が存在する

  かつ
  - 閉領域 R のいたるところで、方程式を満足する関数がある

  ことである。

偏微分方程式の一意的な解は、・・・

- ある物理的な問題に対する偏微分方程式の一意的な解は、物理的状況から得られる付加的な情報を用いて決められる。
  →付加的条件
- 実際に微分方程式を解くとは、与えられた領域で成立して、与えられた付加的条件を満たす方程式の解を得ること。

付加的条件

- 初期条件($t = 0$ での条件)
  - 波動方程式→初期変位, 初期速度
  - 熱方程式→初期温度分布
- 境界条件
  境界の表面 S , 領域の境界線 C で
  解 u の値やその導関数が与えられる。
  - ラプラスの方程式には境界条件を与える。

解の重ね合わせまたは線形原理（定理）

同次線形偏微分方程式においては、同次線形常微分方程式と同様に、既知の解の重ね合わせにより新しい解が得られる。

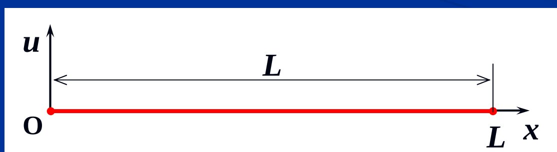
- ある領域 R での線形同次偏微分方程式の任意の解を u_1, u_2 とすると、

$$\boxed{u = c_1 u_1 + c_2 u_2}$$

も、その領域 R での解である。ただし、c_1, c_2 は任意の定数である。

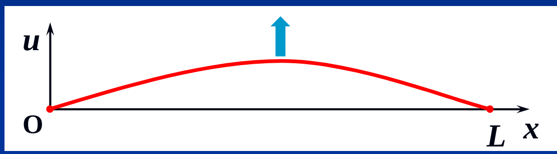
3.2　振動する弦のモデル化と波動方程式の導出

- バイオリンの弦のような弾性的な弦の微小横振動の波を記述する方程式を導く。
- 長さ L の弦を用意する。
  - 弦の一端を $x = 0$ で固定する。
  - 弦を x 軸に沿って長さが L になるように伸ばす。
  - 弦のもう一端を $x = L$ で固定する。

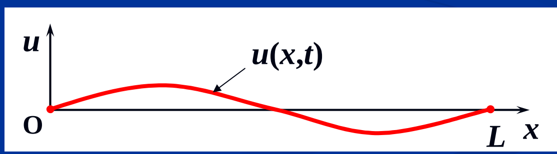


振動する弦

- 弦を変形させて、ある瞬間($t = 0$)から振動を開始させる。



- $t > 0$ での弦の形、すなわち任意の場所 x , 任意の時間 t での弦の変位 $u(x, t)$ を求めたい。

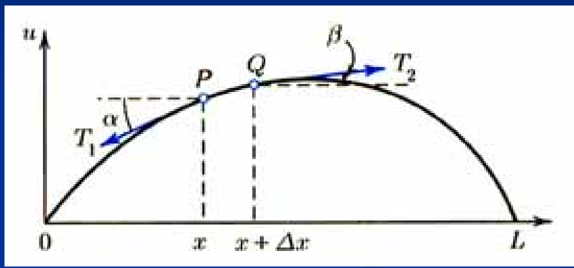


物理的仮定

1. 弦の単位長さあたりの質量は、一定である (弦の均質性) 。弦は完全に弾性的で、曲げに対する抵抗がない。
2. 弦を両端で固定するときに弦を伸ばすが、そのときの張力が十分に大きいので、弦に働く重力の効果は無視できる。
3. 弦は垂直面内で微小横運動を行う。すなわち、弦の各点は厳密に垂直方向に動き、各点における弦の変位と傾きの絶対値は小さい。

弦の微小部分に働く力（力学モデルへ）

- 弦の微小部分に働く力について考える。

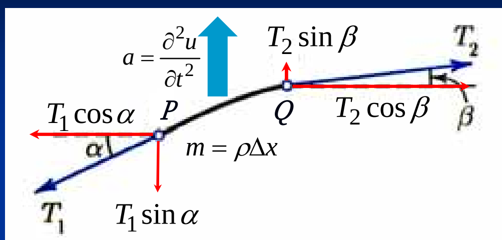


- 弦は曲げに対して抵抗がないので、弦の各点で接線方向に張力が働く。微小部分の端点 P と Q での張力 T_1 と T_2 とする。
- 弦の各点は垂直方向に動き、水平方向には運動しない。

微小部分に働く張力（力学モデル）

- 弦の各点は
  垂直方向に動き、
  水平方向には
  運動しない。

したがって、



- 張力の水平方向成分は一定でなければならない。 $T_1\cos\alpha = T_2\cos\beta = T = \text{constant}$
- 垂直方向には、2つの力が働き、これら2つの合力は、微小部分の質量 m に加速度a を掛けたものに等しい。 $T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = \rho\Delta x\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- 両辺を T で割る。→左辺は･･･ $T=T_1\cos\alpha,\ \ T=T_2\cos\beta$

傾きの関係（力学モデル）

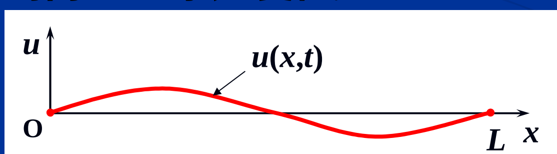
$$\frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho \Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- $\tan\alpha$ は、点 P（位置 x）での弦の曲線の傾き $\quad \tan\alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_x$
- $\tan\beta$ は、点 Q（位置 $x+\Delta x$）での弦の曲線の傾き $\quad \tan\beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x}$
- $\tan\alpha$, $\tan\beta$ を代入し、両辺を Δx で割る。 $\quad \frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_x\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$
- Δx を0に近づけると、次の線形偏微分方程式を得る。 $\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

1次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 同次2階の微分方程式
- 物理定数 T/ρ を c^2 で表す。 $\quad c^2 = \frac{T}{\rho}$
  （T/ρ は正の量であることを示すため）
- 1次元：空間座標 x のみが現れる。
- $u(x, t)$：$t > 0$ での弦の形、すなわち任意の場所 x，任意の時間 t での弦の変位。



3.3 変数分離法とフーリエ級数を利用した偏微分方程式の解法

- 弦がどのように運動するかを調べるためには、偏微分方程式を解かなければならない。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

- 解 u は、物理系に課せられている次の条件を満たす必要がある。
- 境界条件
  弦が $x=0$ と $x=L$ で固定されている。

$$u(0,t)=0, \quad u(L,t)=0 \quad (2)$$

- 初期条件
  初期変位（$t=0$ での変位） $f(x)$
  初期速度（$t=0$ での速度） $g(x)$
  （これらによって弦の運動の様子が変わる）

$$u(x,0)=f(x) \quad (3)$$

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = g(x) \quad (4)$$

解法の手順

ステップ1
いわゆる変数分離法または乗積法を適用して、2つの常微分方程式を得る。

ステップ2
これら2つの方程式の解で、かつ境界条件(2)を満たすものを求める。

ステップ3
これらの解を組み合わせて、波動方程式(1)の解であり、かつ初期条件(3)と(4)を満たすものを見つける。

ステップ1：2つの常微分方程式

- 変数分離法または乗積法の適用→→ $u(x,t)=F(x)G(t) \quad (5)$
  方程式の解を変数 x と t のみに依存する2つの関数の積で表す。
- 微分すると次式となる。→→→→→ $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F\ddot{G}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=F''G$
  ドットは時間 t に関する微分を表す。
  プライム´は位置 x に関する微分を表す。
- 微分方程式(1)に代入すると次式となる。→ $F\ddot{G}=c^2F''G$
- さらに両辺を c^2FG で割る。
- この式の両辺は定数でなければならない。→ $\frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{F''}{F}=k$
  左辺は t のみ、右辺は x のみの関数である。
  ここで t の値を変えると左辺の値は変わるが、
  右辺の値は変わらない（x についても同様）。
  その場合、この式が成立するのは定数の場合だけである。
- 以上より、2つの常微分方程式を得る。→

$$F''-kF=0 \quad (6)$$
$$\ddot{G}-c^2kG=0 \quad (7)$$

 19

ステップ2：境界条件(2)を満たす

- 式(6)と式(7)から F と G を決めて、$u=FG$ が境界条件(2)を満たすようにする。

$$F''-kF=0 \quad (6)$$
$$\ddot{G}-c^2kG=0 \quad (7)$$

- 境界条件(2)：2つの固定点
  すべての t について次式が成り立つ。→→→→

$$u(0,t)=F(0)G(t)=0$$
$$u(L,t)=F(L)G(t)=0$$

- 式(6)の解
  式(5)で $G(t)\equiv 0$ ならば，明らかに $u\equiv 0$ となり，意味のない解となる。 $u(x,t)=F(x)G(t) \quad (5)$
  したがって，$G(t)\fallingdotseq 0$ とすると，境界条件は次のようになる。→→→→→→→→→→→→→

$$F(0)=0 \quad (8a)$$
$$F(L)=0 \quad (8b)$$

- k を調べる $F''-kF=0 \quad (6)$
  $k=0$ のとき，式(6)の一般解は $F(x)=ax+b$ となる。式(8)から $a=b=0$ が得られる．したがって，$F(x)\equiv 0$，$u\equiv 0$ となり，**意味のない解**となる。
  $k>0$ のとき，$k=\mu^2$ とおくと，式(6)の一般解は $F=Ae^{\mu x}+Be^{-\mu x}$
  式(8)を用いると $F(x)\equiv 0$，$u\equiv 0$ となり，**意味のない解**となる。

 20

ステップ2：k を決める

$k<0$ のとき、$k=-p^2$ とおくと、式(6) の形 → $F''+p^2F=0 \qquad (6)'$
および一般解は次式となる。 → $F(x)=A\cos px+B\sin px$

式(8)から、次式を得る。→ $F(0)=A=0$　$F(L)=B\sin pL=0$

$B=0$ では、$F(x)\equiv 0$，$u\equiv 0$ となり，意味のない解となる。

$B\neq 0$ とおくと、$\sin pL=0$ となり、その結果、次式が得られる。 → $pL=n\pi$ → $p=\dfrac{n\pi}{L} \qquad (9)$

$B=1$ とおくと、無限に多くの解 $F(x)=F_n(x)$ が得られる。

$$F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (10)$$

n が負の整数の場合には、$\sin(-\alpha)=-\sin(\alpha)$ であるので、式(10)の解の符号が変わるだけで同じ解が得られる。

このように k が限定され、式(6)´と式(9)から k の値が次のようになる。 → $k=-p^2=-(n\pi/L)^2$

ステップ2：G の一般解 → 解 u

この k の値 $k=-p^2=-(n\pi/L)^2$ に対して、

方程式 (7) は式(11*) の形になる。

$$\ddot{G}-c^2kG=0 \qquad (7) \rightarrow \ddot{G}+\lambda_n{}^2G=0 \qquad (11^*)$$

ここで、$\lambda_n=\dfrac{cn\pi}{L}$

また、一般解は次式となる。→ $G_n(t)=B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t$

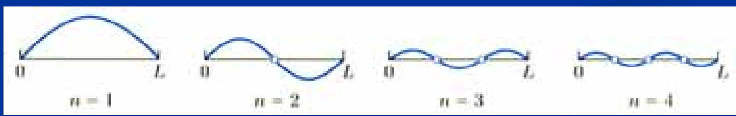
したがって、解となる関数 $u_n(x,t)=F_n(x)\,G_n(t)$ は、次式となる。

$$u_n(x,t)=\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (11)$$

関数 u_n を振動弦の固有関数または特性関数と呼ぶ。
λ_n を固有値または特性値と呼ぶ。
$\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots\}$ をスペクトルと呼ぶ。

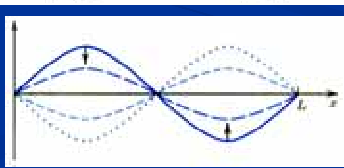
固有関数について

- u_n は、振動数が $\lambda_n/2\pi = cn/2L$ の調和振動である。
  - この運動を弦の第 n 標準モードと呼ぶ。
  - 第1標準モードは基本モード（n=1）と呼ぶ。
  - ほかの標準モードは、倍音(overtone, harmonic)、高調波(higher harmonics)，上音(overtone)などと呼ばれる。
- 第 n 標準モードは n-1 個の節をもつ。
  - 節とは弦の動かない点である（動かない両端点を除く）。



- 第2標準モードの時間変化
- 調律

$$f_n = \frac{\lambda_n}{2\pi} = \frac{cn}{2L} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$



ステップ3：問題の一般解

- 単一解 $u_n(x, t)$ では、一般に初期条件(3)と(4)を満たすことができない。
- さて、一次元波動方程式(1)は、線形かつ同次であるので、解の重ね合わせの定理から、有限個の u_n の和も、この方程式(1)の解である。
- そこで、初期条件(3)と(4)を満たす解を得るため、次の無限級数を考える。

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \cos\lambda_n t + B_n{}^* \sin\lambda_n t\right) \sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (12)$$

$$\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}$$

ステップ3：初期条件(3)初期変位

- 初期条件(3)から式(12)は次式(13)となる。

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x) \qquad (13)$$

したがって、

- $u(x,0)$ が、$f(x)$ のフーリエ正弦級数になるように係数 B_n はフーリエ正弦級数の係数となる。

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \quad (14)$$

ステップ3：初期条件(4)初期速度

- 同様に式(12)を微分して、初期条件(4)を用いると次式となる。

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n{*}\lambda_n\cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n{*}\lambda_n\right)\sin\frac{n\pi x}{L}=g(x)$$

したがって、上式の最後の等号が成立するためには
フーリエ係数 $B_n{*}$ はフーリエ正弦級数の係数となる。

$$B_n{*}\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$\lambda_n = cn\pi/L$ であるので上式は次式のように書ける。

$$B_n{*}=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \quad (15)$$

ステップ3：結果

- **形式解**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n{}^*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (12)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (14)$$

$$B_n{}^*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \qquad (n=1,2,\cdots) \qquad (15)$$

式(12)は、式(1)の解であって、条件(2)(3)(4)を満たす。ただし、級数(12)が収束して、級数(12)を x と t について2回微分した級数も収束して、和が連続な $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^2 u/\partial t^2$ になる必要がある。

ステップ3：解の妥当性

- **形式解(12)が正しいことを証明する。**

簡単のため初速度 $g(x)$ が0である場合を考える。この場合 $B_n{}^*$ は0で式(12)は次式となる。

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos(\lambda_n t)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}\right) \qquad (16)$$

3角関数の積を和にする公式を用いて、

$$\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

次式のように書き換えられる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

ステップ3：解の妥当性（続き）

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

ここで、$f(x)$ をフーリエ正弦級数で表した式(13)の変数 x に $x-ct$ と $x+ct$ をそれぞれ代入する。

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x) \qquad (13)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}(x-ct)=f(x-ct), \quad \sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}(x+ct)=f(x+ct)$$

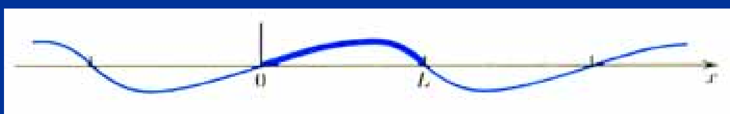
すると、右辺の2つの級数が得られるので、この式は次のように書き換えることができる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right] \qquad (17)$$

ステップ3：解であることの保証

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f^*(x-ct)+f^*(x+ct)\right] \qquad (17)$$

ここで、f^* は周期 $2L$ をもち、f を奇関数として拡張したものである。



初期変位 $f(x)$ が区間 $0 \leqq x \leqq L$ で連続で、かつ両端で0であるので、式(17)から $u(x,t)$ はすべての x と t に対して連続である。さらに式(17)を微分して、$f(x)$ が区間 $0 < x < L$ で2回微分可能で、$x=0$ と $x=L$ で2階の片側微分係数（右微分係数または左微分係数）0をもてば、$u(x,t)$ は、式(2),(3),(4) を満たす式(1)の解であることが保証される。

ステップ3：広義の解

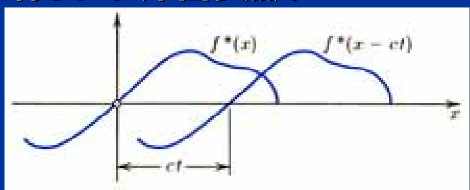
$f'(x)$ と $f''(x)$ が区分的にのみ連続であるか、
または片側微分係数が 0 でない場合には、
それぞれの t の値に対して、式(1)の中に現れる
2階偏導関数が存在しないような x の値が有限
個存在する。

一方でこれらの点以外では波動方程式を満たす
ので、 $u(x, t)$ をこの問題の広義の解とみなす
ことができる。後述する初期変位が 3 角形状の
場合に、この型の解となる。

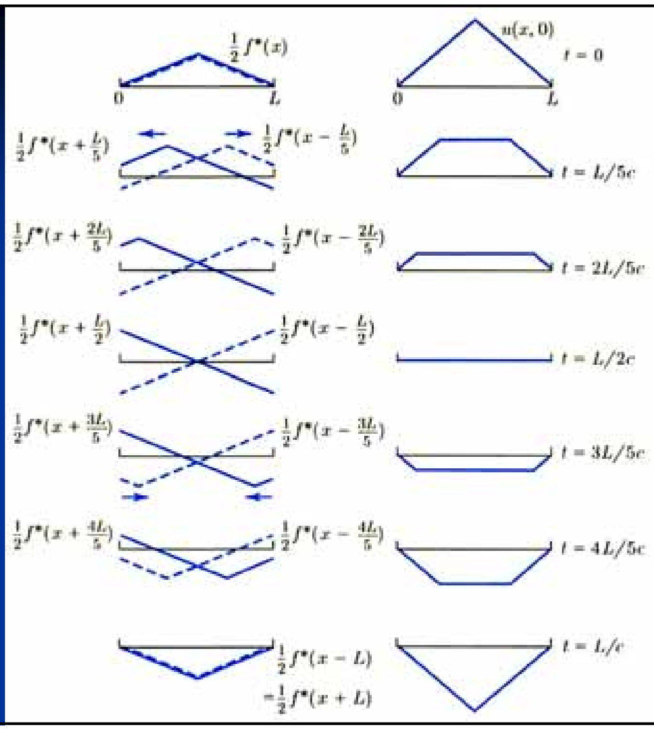
ステップ3：式(17)の物理的解釈

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f^*(x-ct) + f^*(x+ct) \right] \qquad (17)$$

$f^*(x - ct)$ のグラフは、$f^*(x)$ のグラフを右へ ct だけ
移動させて得られる（下図参照）。



したがって、t の増加とともに ($c > 0$)
$f^*(x - ct)$ は、右へ進行する波を、
$f^*(x + ct)$ は、左へ進行する波を表す。
そして、$u(x, t)$ はこれら2つの波の重ねあわせである。



33

3.4　波動方程式のダランベールの解

- 別の方法で、今示した波動方程式の解の式(17)が直接得られることを示す。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(c^2 = \frac{T}{\rho}\right) \qquad (1)$$

- 式(2)の新しい独立変数を導入し、u を v と z の関数とする。

$$v = x + ct, \qquad z = x - ct \qquad (2)$$

- 式(1)の偏導関数を v と z についての偏導関数で表す。
- これ以後、偏微分を下付き添え字で表すことにする。
- 式(2)から

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_x = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 1$$

34

- $u(x,t)$ は v と z の関数であるので、連鎖の法則から偏微分 u_xは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_x &= u_v v_x + u_z z_x \\ &= u_v + u_z \end{aligned}$$

- さらに連鎖の法則を適用すると、偏微分 u_{xx}は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (u_v + u_z)_x \\ &= (u_v + u_z)_v v_x + (u_v + u_z)_z z_x \end{aligned}$$

- すべての偏微分が連続するとすると $u_{zv} = u_{vz}$ である。よって、

$$\begin{aligned} &= (u_{vv} + u_{zv}) + (u_{vz} + u_{zz}) \\ &= u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz} \end{aligned}$$

- 式(1)の偏微分 u_{tt} も同様に変形すると次式が得られる。

$$u_{tt} = c^2(u_{vv} + 2u_{zv} + u_{zz})$$

- この2つの結果を式(1)に代入すると次式となる。

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \qquad (3)$$

- この方法の利点は、積分を2回繰り返せば、式(3)が簡単に解けることである。

$$u_{vz} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial v} = 0 \qquad (3)$$

- 実際にここで, z について積分すると次式が得られる。
ただし、$h(v)$ は v の任意関数である。

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v)$$

- さらに, v について積分すると次式が得られる。
ただし、$\psi(z)$ は z の任意関数である。

$$u = \int h(v)dv + \psi(z)$$

- 積分は v のみの関数なので、$\phi(v)$ とすると、u の解は $u = \phi(v) + \psi(z)$ の形となる。そして式(2)を用いると、波動方程式のダランベールの解が得られる。

$$u(x,t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \qquad (4)$$

初期条件を満たすダランベールの解

- 波動方程式のダランベールの解

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\psi(x-ct) \qquad (4)$$

- 初期条件（初期変位 $f(x)$ と初期速度 $g(x)$）は次式で表される。

$$u(x,0)=f(x) \qquad (5)$$
$$u_t(x,0)=g(x) \qquad (6)$$

- 式(4)を微分すると次式となる。

$$u_t(x,t)=c\phi'(x+ct)-c\psi'(x-ct) \qquad (7)$$

ただし、プライム´は、引数 $x+ct$ と $x+ct$ についての微分である。

- 式(4)-(7)から、

$$u(x,0)=\phi(x)+\psi(x)=f(x) \qquad (8)$$
$$u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\psi'(x)=g(x) \qquad (9)$$

- 式(9)を c で割って、x で積分すると次式が得られる。

$$\phi(x)-\psi(x)=k(x_0)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds \qquad (k(x_0)=\phi(x_0)-\psi(x_0)) \qquad (10)$$

- 式(10)と式(8)を加えてψを消去し、2で割るとφ(x) が得られる。

$$\phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)$$

- 式(8)から式(10)を引いて、2で割るとψ(x) が得られる。

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (12)$$

- 式(11)で x を $x+ct$ と置き換える（積分区間 x_0 から $x+ct$ まで）。

$$\phi(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)^*$$

- 式(11)で x を $x+ct$ と置き換える (積分区間 x_0 から $x+ct$ まで)。

$$\phi(x+ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct}g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (11)*$$

- 式(12)で x を $x-ct$ と置き換える (積分区間 x_0 から $x-ct$ まで)。
さらに積分の符号を変えて積分区間を $x-ct$ から x_0 までにする。

$$\psi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x_0}g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0) \qquad (12)*$$

- こうしておいて、$\phi(x+ct)$ と $\psi(x-ct)$ を加える、すなわち
式(4)より次式が得られる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds \qquad (13)$$

- 初期速度が0ならば、一次元波動方程式の解が得られる。

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right] \qquad (14)$$

これは変数分離法で求めた解と同じである。